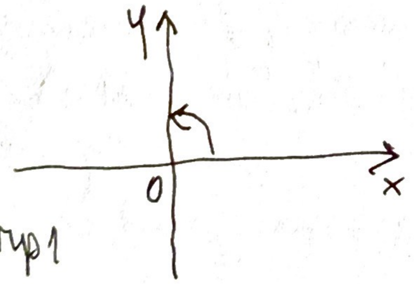
Geometria analityczna

1. Współrzędne

Współrzędne punktu są to wielkości określające położenie punktu: na prostej, na płaszczyźnie, w przestrzeni lub na dowolnej krzywej.

1.1. Prostokątny układ współrzędnych

Pozycja punktu na płaszczyźnie jest określona przez dwie współrzędne. (x, y)
Dwie prostopadłe proste wyznaczają prostokątny układ współrzędnych. Punkt wspólny tych prostych jest nazywany początkiem układu.
Na każdej prostej ustalamy jednostkę długości (taką samą na obu prostych)
Na każdej prostej (osi X lub osi Y) wyznaczamy kierunek nazywany kierunkiem dodatnim.
Symbolizuje go strzałka na ryc. 1.

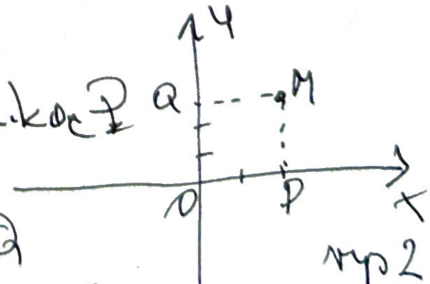


ryc 1

Kierunki na osiach są wybierane tak, aby ruch przeciwny do ruchu wskazówek zegara od osi Ox prowadził do osi Oy.

1.2. Współrzędne prostokątne

Współrzędne punktu M w prostokątnym układzie współrzędnych są ustalane następująco.
Rysujemy prostą równoległą do OY, przechodzącą przez punkt M.
Przecina się ona z osią Ox w punkcie P.
Podobnie prosta równoległa do osi Ox przecina oś OY w punkcie Q.

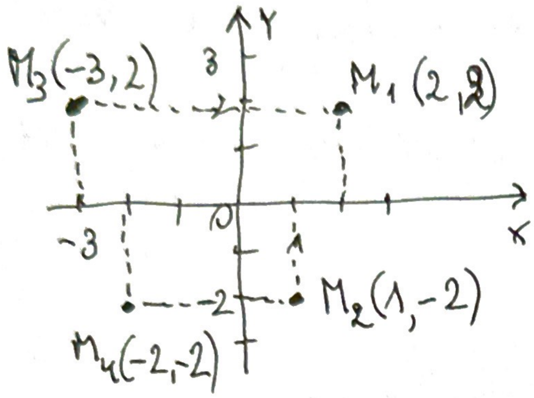


ryc 2

Liczby, które są długościami odcinków OP oraz OQ są nazywane prostokątnymi współrzędnymi (lub po prostu współrzędnymi) punktu M.

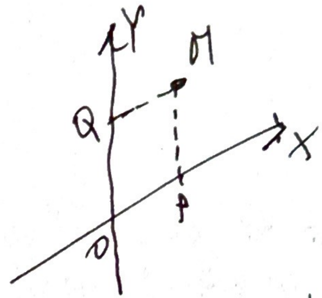
Jeżeli rzut punktu M na oś Ox przypada w jej części dodatniej to współrzędna x-owa ma wartość dodatnią, w przeciwnym razie ma wartość ujemną. (wyp 3)

Przykłady punktów i ich współrzędnych.



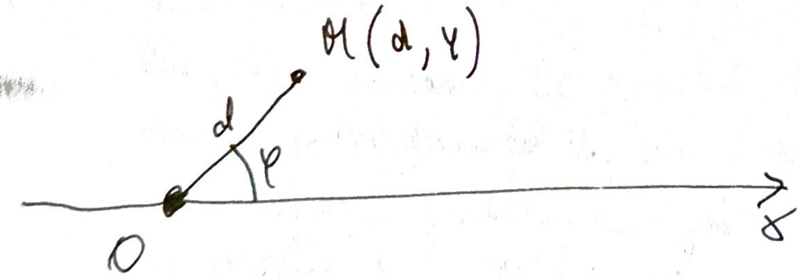
wyp 3.

Można rozważać również układy współrzędnych nie prostopadłych wtedy między osiami Ox i OY nie ma kąta prostego. (ukł. ukośne) Zasady określania współrzędnych są takie same (wyp 4.)



wyp 4

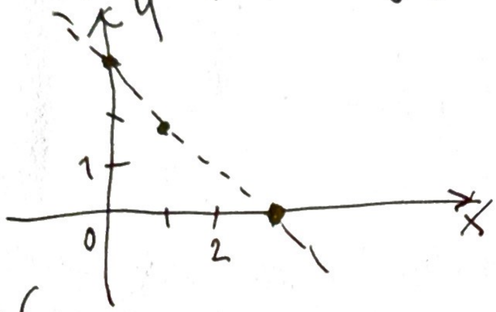
Układy prostokątne i ukośne są nazywane układami współrzędnych kartezjańskich. (Kartezjusz)
Oprócz nich rozważa się też układ współrzędnych biegunowych, gdzie współrzędne punktu są określone przez odległość od początku układu oraz kąt nachylenia prostej przechodzącej przez początek układu i punkt M do dodatniej części osi OX.



wyp 5.

2. Równanie prostej

Rozpatrzmy równanie $x + y = 3$. Istnieje nieskończenie wiele par liczb (a, b) spełniających to równanie.
Np. $x = 1$ $y = 2$; $x = 3$, $y = 0$; $x = 0$, $y = 3$ itd.
Jeżeli naniesiemy na rysunek prostokątnego układu kartezjańskiego te punkty to będą one leżały na jednej prostej (rys 6)



rys 6.

Ogólnie: równanie wiążące współrzędne x z współrzędną y jest nazywane równaniem prostej L jeśli spełnione są warunki

a) współrzędne x i y dowolnego punktu M należącego do prostej L spełniają równanie
b) współrzędne x, y dowolnego punktu nie należącego do prostej L nie spełniają równania

2.1. Wzajemne położenie prostej i punktu oraz dwóch prostych

Aby stwierdzić, że punkt $M(x, y)$ należy do prostej L należy sprawdzić, czy współrzędne x i y spełniają równanie prostej L. Jeśli tak to punkt M należy do prostej L. Jeśli równanie prostej L nie jest spełnione przez współrzędne x i y punktu M, to leży on poza prostą L.

Aby stwierdzić czy dwie linie mają punkt wspólny trzeba znać równania tych linii. Jeżeli układ równań odpowiadający obu liniom ma jednoznaczne rozwiązanie to linie te mają punkt (punkty) wspólne.

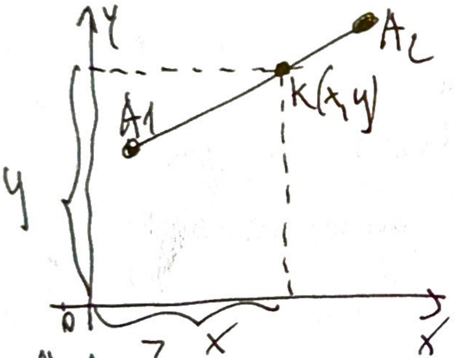
2.2. Odległość między punktami

Odległość d między punktami $A_1(x_1, y_1)$ i $A_2(x_2, y_2)$ jest określona wzorem:

$$d = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$ (wynika z twierdzenia Pitagorasa)

Odległość punktów jest wielkością o wartości dodatniej. Powyżej zdefiniowana odległość nazywa się odległością euklidesową. (Jest mierzona „po prostej")

2.3. Podział odcinka w danym stosunku



rys. 7

Żeby znaleźć współrzędne punktu K trzeba je tak wyznaczyć by

$$A_1K : KA_2 = m_1 : m_2$$

Rozwiązaniem jest

$$x = \frac{m_2x_1+m_1x_2}{m_1+m_2} \qquad (1)$$

$$y = \frac{m_2y_1+m_1y_2}{m_1+m_2}$$

Jeżeli $m_1 : m_2$ oznaczymy jako λ, to wzory (1) otrzymują niesymetryczną postać:

$$x = \frac{x_1+\lambda x_2}{1+\lambda}\ ; \quad y = \frac{y_1+\lambda y_2}{1+\lambda}$$

W szczególnym przypadku gdy $\lambda = 1$ czyli $m_1 = m_2$ otrzymujemy wzory na punkt środkowy odcinka A_1A_2

$$x = \frac{x_1+x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1+y_2}{2}$$

Aby stwierdzić czy dwie linie mają punkt wspólny trzeba znać równania tych linii. Jeżeli układ równań odpowiadający obu liniom ma jednoznaczne rozwiązanie to linie te mają punkt (punkty) wspólne.

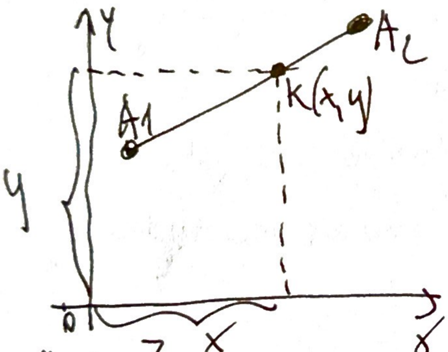
2.2. Odległość między punktami

Odległość między punktami $A_1(x_1, y_1)$ i $A_2(x_2, y_2)$ jest określona wzorem:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$ (wynika z twierdzenia Pitagorasa)

Odległość punktów jest wielkością o wartości dodatniej. Powyżej zdefiniowana odległość nazywa się odległością euklidesową. (Jest mierzona „po prostej")

2.3. Podział odcinka w danym stosunku



rys. 7

Żeby znaleźć współrzędne punktu K trzeba je tak wyznaczyć by

$$A_1K : KA_2 = m_1 : m_2$$

Rozwiązaniem jest

$$x = \frac{m_2 x_1 + m_1 x_2}{m_1 + m_2} \qquad (1)$$

$$y = \frac{m_2 y_1 + m_1 y_2}{m_1 + m_2}$$

Jeżeli $m1 : m2$ oznaczymy jako λ, to wzory (1) otrzymują niesymetryczną postać:

$$x = \frac{x_1 + \lambda x_2}{1 + \lambda} \; ; \; y = \frac{y_1 + \lambda y_2}{1 + \lambda}$$

W szczególnym przypadku gdy $\lambda = 1$ czyli $m_1 = m_2$ otrzymujemy wzory na punkt środkowy odcinka A_1A_2

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad y = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

2.4. Wyznacznik drugiego stopnia

Wyznacznikiem macierzy $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ nazywamy wartość $ad - bc$. Wyznacznik macierzy $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ oznaczamy $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$.

Przykład

1. $\begin{vmatrix} 2 & 7 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 10 - 21 = -11$

2. $\begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = 3 \cdot 2 - (-4) \cdot 6 = 30$

2.5. Pole powierzchni trójkąta o wierzchołkach A_1, A_2, A_3

Niech punkty $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$ będą wierzchołkami trójkąta. Wtedy pole powierzchni tego trójkąta S opisuje wzór.

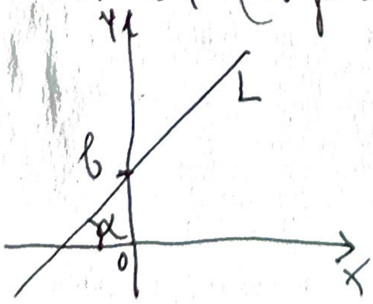
$$S = \pm \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{vmatrix}$$

Jeśli wartość wyznacznika w powyższym wzorze jest liczbą dodatnią, to znak „+". W przeciwnym razie „−". Zapewniamy w ten sposób, że S jako pole jest dodatnie.

Przykład Znaleźć pole trójkąta o wierzchołkach:
$A_1(0,0)$, $A_2(2,0)$, $A_3(0,2)$

2.6. Linia prosta na płaszczyźnie (postać kierunkowa)

Dowolna prosta, która nie jest równoległa do osi OY może być przedstawiona w postaci $y = ax + b$; a jest tangensem nachylenia prostej do dodatniej półosi OX, zaś b jest punktem przecięcia prostej z osią OY (rys 8)



Wartość a jest nazywana nachyleniem prostej L. Wartość b jest równa długości odcinka Ob. Jeśli $b = 0$ to prosta L przechodzi przez początek układu.

Linia, która jest równoległa do osi Ox nie może być przedstawiona w postaci $y = ax + b$, bo jej nachylenie do dodatniej półosi Ox jest równe $90°$. ($tg 90° = +\infty$). Punkt przecięcia takiej prostej z osią OY nie istnieje.

- Linia prosta równoległa do osi Ox jest opisana równaniem

  $y = b$.

  gdzie $|b|$ jest odległością od początku układu do przecięcia się prostej z osią OY.

- Linia prosta równoległa do osi OY jest opisana równaniem

  $x = f$.

  gdzie $|f|$ jest odległością od początku układu do przecięcia się prostej z osią OX.

2.7. Postać ogólna równania prostej na płaszczyźnie

Równanie $Ax + By + C = 0$ dla dowolnych wartości A, B i C ale takich aby A i B nie były jednocześnie zerami, opisuje linię prostą.
Ta postać opisuje dowolną prostą i jest nazywana postacią ogólną równania prostej na płaszczyźnie.

- Gdy $A = 0$, to w równaniu nie występuje x, i prosta jest równoległa do osi Ox
- Gdy $B = 0$, to w równaniu nie występuje y i prosta jest równoległa do osi OY
- Gdy $B \neq 0$, to równanie może być rozwiązane dla y i przyjmuje postać

  $$y = ax + b \quad \left(\text{gdzie } a = -\frac{A}{B},\ b = -\frac{C}{B}\right)$$

- Gdy $C = 0$, to równanie ~~prosta~~ opisuje prostą przechodzącą przez początek układu współrzędnych

Aby wyznaczyć prostą o określonym równaniu wystarczy znaleźć dwa punkty (ich współrzędne), które spełniają równanie. Prosta przechodzi przez te punkty.

2.8. Warunek równoległości prostych na płaszczyźnie

Dwie proste o równaniach $y=a_1x+b_1$ i $y=a_2x+b_2$ są równoległe gdy $a_1=a_2$

Jeśli dwie proste są zadane równaniami

$$A_1x+B_1y+C_1=0 \quad i \quad A_2x+B_2y+C_2=0,$$

to warunek równoległości ma postać

$$A_1B_2-A_2B_1=0 \quad \text{lub} \quad \begin{vmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{vmatrix}=0$$

2.9. Punkt przecięcia się prostych

Aby znaleźć punkt wspólny prostych o równaniach $A_1x+B_1y+C_1=0$ i $A_2x+B_2y+C_2=0$, należy znaleźć rozwiązanie układu równań

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2=0 \end{cases}$$

Jeśli $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}$, to proste są równoległe i układ nie ma rozwiązania.

3.0. Prostopadłość dwóch prostych

Jeśli dwie proste opisane są równaniami $y=a_1x+b_1$ oraz $y=a_2x+b_2$, to są one prostopadłe gdy

$$a_1\cdot a_2=-1 \quad \left(\text{lub } a_1=-\frac{1}{a_2} \text{ lub } a_2=-\frac{1}{a_1}\right)$$

Gdy $a_1\cdot a_2\neq -1$, to proste nie są prostopadłe.

Dla dwóch prostych opisanych równaniami $A_1x+B_1y+C_1=0$ oraz $A_2x+B_2y+C_2=0$ warunek prostopadłości ma postać: $A_1\cdot A_2+B_1\cdot B_2=0$

3.1. Kąt między prostymi

Niech dwie proste będą opisane równaniami

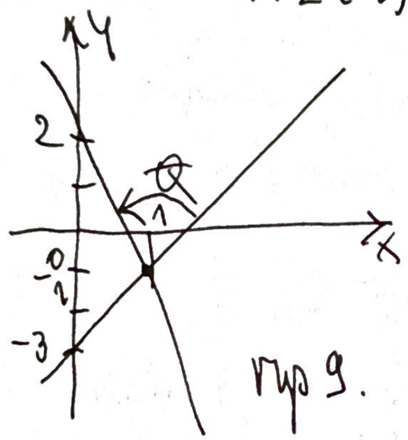
$$y = a_1 x + b_1 \quad \text{oraz} \quad y = a_2 x + b_2 .$$

Wtedy wzór $\operatorname{tg}\theta = \dfrac{a_2 - a_1}{1 + a_1 \cdot a_2}$ opisuje kąt o który należy obrócić pierwszą linię aby stała się równoległa do drugiej.

<u>Przykład</u> Znaleźć kąt między prostymi o równaniach $y = 2x - 3$ i $y = -3x + 2$

Tu $a_1 = 2$ i $a_2 = -3$. Stosując formułę otrzymujemy

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{-3-2}{1+2\cdot(-3)} = 1 . \quad \text{zatem } \theta = 45^\circ$$



rys 9.

3.2. Trzy punkty na jednej prostej

Trzy punkty $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$ leżą na jednej prostej wtedy i tylko wtedy, gdy

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

Jest to równoznaczne z tym, że pole trójkąta o wierzchołkach A_1, A_2 i A_3 ma wartość 0.

3.3. Równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty

Linia prosta przechodząca przez punkty $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$ opisana jest równaniem.

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x - x_1 & y - y_1 \end{vmatrix} = 0$$

Powyższe równanie może być zapisane w postaci

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$ lub jeszcze inaczej jako

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

3.4. Pęk prostych przechodzących przez punkt $A_1(x_1, y_1)$

Równanie pęku prostych przechodzących przez punkt $A_1(x_1, y_1)$ ma postać:

$$y - y_1 = k(x - x_1)$$

Punkt A_1 nazywany jest wierzchołkiem pęku prostych, a k parametrem pęku prostych.

3.5. Równanie prostych przechodzących przez punkt $A_1(x_1, y_1)$ i równoległych lub prostopadłych do prostej o równaniu $y = ax + b$.

Dla prostej równoległej: $y - y_1 = a(x - x_1)$

Dla prostej prostopadłej: $y - y_1 = -\frac{1}{a}(x - x_1)$

3.6. Odległość punktu od prostej

Odległość od punktu $M_1(x_1, y_1)$ do prostej $Ax + By + C = 0$ jest równa bezwzględnej wartości wyrażenia

$$d = \frac{Ax_1 + By_1 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}}$$

Uzasadnienie poprzedniego wzoru.

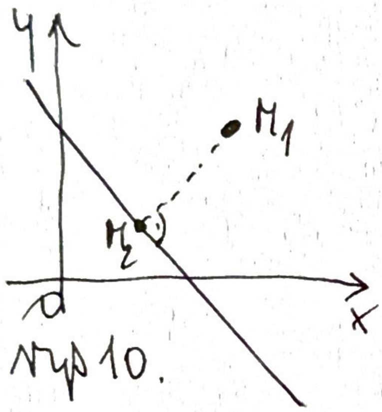
Niech $M_2(x_2, y_2)$ będzie rzutem prostokątnym punktu M_1 na prostą $Ax+By+C=0$.
Wtedy odległość punktów M_1 i M_2 jest opisana wzorem

$$d=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}. \qquad (*)$$

Współrzędne punktu $M_2(x_2, y_2)$ znajdujemy rozwiązując układ równań

$$\begin{cases} Ax+By+C=0 \\ A(y-y_1)-B(x-x_1)=0 \end{cases}$$

← to jest równanie prostej przez M_1 i M_2



Rys 10.

Przekształcamy pierwsze równanie do postaci

$$A(x-x_1)+B(y-y_1)+Ax_1+By_1+C=0$$

Rozwiązując układ z przekształconym równaniem względem $(x-x_1)$ oraz $(y-y_1)$ otrzymujemy

$$x-x_1=\frac{-A}{A^2+B}(Ax_1+By_1+C)$$

$$y-y_1=\frac{-B}{A^2+B^2}(Ax_1+By_1+c)$$

Podstawiając rozwiązania do wyrażenia $(*)$ otrzymujemy

$$d=\left|\frac{Ax_1+By_1+C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right| \quad \boxtimes$$